

Окружности. Вариант 1 (с решением)

Ответом к каждому из заданий является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответ в отведённом поле, начиная с первой клеточки. Каждый символ записывается в отдельной клеточке.

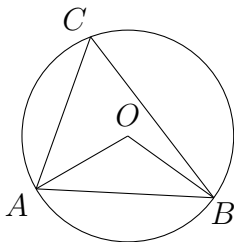
Пример записи ответа:

-	3	,	4	5
---	---	---	---	---

1. Углы и треугольники в окружности

1

Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O . Точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB . Найдите угол ACB , если угол AOB равен 167° . Ответ дайте в градусах.



Решение.

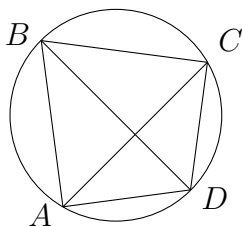
Т. к. центральный угол AOB равен 167° , то градусная мера дуги $\widehat{AB}$ равна 167° . Вписанный угол ACB опирается на $\widehat{AB}$, поэтому равен $\frac{167^\circ}{2} = 83,5^\circ$.

Ответ:

8	3	,	5	
---	---	---	---	--

2

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 39° , угол CAD равен 55° . Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.



Решение.

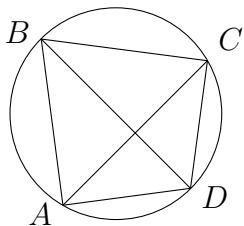
Т. к. вписанные углы CBD и CAD опираются на одну дугу $\widehat{CD}$, то они равны, $\angle CBD = \angle CAD = 55^\circ$. Угол ABC равен сумме углов ABD и CBD , $\angle ABC = 39^\circ + 55^\circ = 94^\circ$.

Ответ:

9	4			
---	---	--	--	--

3

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 70° , угол CAD равен 49° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.



Решение.

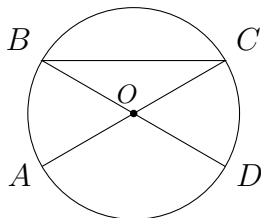
Т.к. вписанные углы CBD и CAD опираются на одну дугу $\widehat{CD}$, то они равны, $\angle CBD = \angle CAD = 49^\circ$. Угол ABC равен сумме углов ABD и CBD , тогда $\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = 70^\circ - 49^\circ = 21^\circ$.

Ответ:

2	1			
---	---	--	--	--

4

В окружности с центром в точке O отрезки AC и BD — диаметры. Угол AOD равен 124° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.



Решение.

Угол AOD равен 124° , тогда смежный с ним $\angle AOB = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$.

Угол AOB — центральный, тогда градусная мера дуги $\widehat{AB}$ равна 56° .

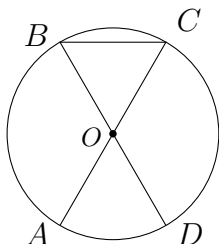
Вписанный угол ACB опирается на $\widehat{AB}$, поэтому равен $\frac{56^\circ}{2} = 28^\circ$.

Ответ:

2	8			
---	---	--	--	--

5

Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром в точке O . Угол ACB равен 79° . Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.



Решение.

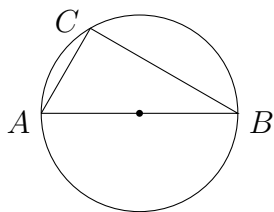
Вписанный угол ACB опирается на дугу $\widehat{AB}$, поэтому градусная мера дуги $\widehat{AB} = 2 \cdot 79^\circ = 158^\circ$. Тогда центральный угол AOB равен 158° , а смежный с ним $\angle AOD = 180^\circ - 158^\circ = 22^\circ$.

Ответ:

2	2			
---	---	--	--	--

6

Центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на стороне AB . Найдите угол ABC , если угол BAC равен 75° . Ответ дайте в градусах.



Решение.

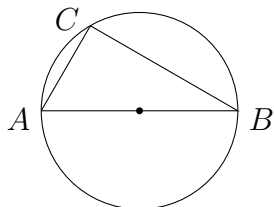
Центр окружности лежит на стороне AB , значит AB — диаметр, тогда вписанный угол ACB , опирающийся на диаметр равен 90° и треугольник ABC прямоугольный. Т. к. один из острых углов прямоугольного треугольника BAC равен 75° , то другой $\angle ABC = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

Ответ:

1	5			
---	---	--	--	--

7

Центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на стороне AB . Радиус окружности равен 25. Найдите AC , если $BC = 48$.



Решение.

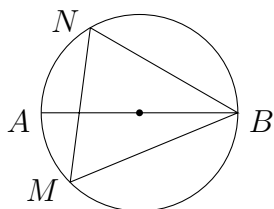
Центр окружности лежит на стороне AB , значит AB — диаметр, тогда вписанный угол ACB , опирающийся на диаметр равен 90° и треугольник ABC прямоугольный. Тогда в этом треугольнике катет BC равен 48, а гипотенуза — удвоенному радиусу, т. е. 50. По теореме Пифагора найдём второй катет $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{50^2 - 48^2} = 14$.

Ответ:

1	4			
---	---	--	--	--

8

На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N . Известно, что $\angle NBA = 36^\circ$. Найдите угол NMB . Ответ дайте в градусах.



Решение.

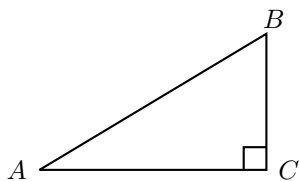
Т. к. вписанный угол NBA равен 36° , то градусная мера дуги $\widehat{AN}$, на которую он опирается равна 72° . Т. к. AB — диаметр, то $\widehat{AB} = 180^\circ$. Тогда $\widehat{BN} = 180^\circ - \widehat{AN} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$. Искомый вписанный угол NMB опирается на эту дугу, поэтому равен половине её градусной меры, т. е. 54° .

Ответ:

5	4			
---	---	--	--	--

9

В треугольнике ABC известно, что $AC = 16$, $BC = 12$, угол C равен 90° . Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.



Решение.

Центр описанной около прямоугольного треугольника лежит на середине гипотенузы, т.е. радиус равен её половине. Найдём гипотенузу:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20.$$

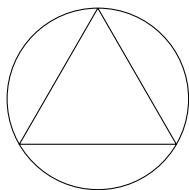
Тогда искомый радиус 10.

Ответ:

1	0			
---	---	--	--	--

10

Сторона равностороннего треугольника равна $2\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



Решение.

Воспользуемся формулой радиуса R описанной около правильного треугольника окружности, сторона которого равна a .

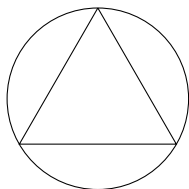
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 2.$$

Ответ:

2				
---	--	--	--	--

11

Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен $8\sqrt{3}$. Найдите длину стороны этого треугольника.



Решение.

Воспользуемся формулой радиуса R описанной около правильного треугольника окружности, сторона которого равна a и выразим из неё сторону

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad 3R = a\sqrt{3}; \quad a = \frac{3R}{\sqrt{3}} = R\sqrt{3}.$$

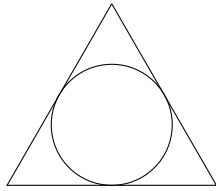
Тогда $a = 8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 24$.

Ответ:

2	4			
---	---	--	--	--

12

Сторона равностороннего треугольника равна $6\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



Р е ш е н и е.

Воспользуемся формулой радиуса r вписанной в правильный треугольник окружности, сторона которого равна a .

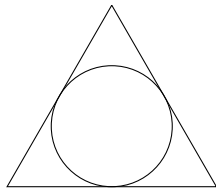
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} = 3.$$

Ответ:

3				
---	--	--	--	--

13

Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен $3\sqrt{3}$. Найдите длину стороны этого треугольника.



Р е ш е н и е.

Воспользуемся формулой радиуса r вписанной в правильный треугольник окружности, сторона которого равна a и выразим из неё сторону

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$6r = a\sqrt{3};$$

$$a = \frac{6r}{\sqrt{3}} = \frac{6r \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6^2 r \cdot \sqrt{3}}{3} = 2r\sqrt{3}.$$

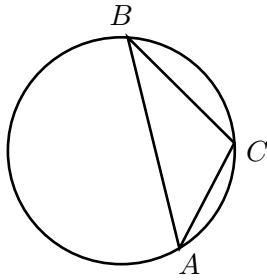
Тогда $a = 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

Ответ:

1	8			
---	---	--	--	--

14

В треугольнике ABC угол C равен 120° , $AB = 18\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



Решение.

Воспользуемся расширенной теоремой синусов

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R$$

Отсюда

$$R = \frac{AB}{2 \sin C} = \frac{18\sqrt{3}}{2 \sin 120^\circ} = \frac{18\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 18.$$

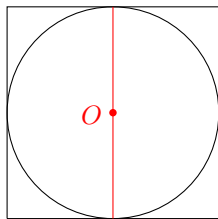
Ответ:

1	8			
---	---	--	--	--

2. Вписанные и описанные четырёхугольники

15

Сторона квадрата равна 6. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.



Решение.

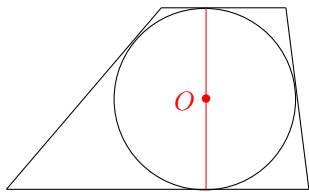
Перпендикуляр к верхней и нижней стороне квадрата, проведённый через центр окружности с одной стороны равен двум радиусам окружности, а с другой — стороне квадрата, т.е. $2r = 6$. Отсюда $r = 3$.

Ответ:

3				
---	--	--	--	--

16

Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 36. Найдите высоту этой трапеции.



Решение.

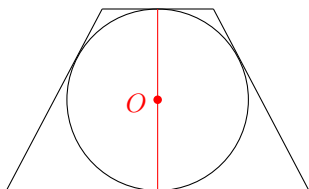
Перпендикуляр к основаниям трапеции, проведённый через центр окружности с одной стороны равен двум радиусам окружности, а с другой — высоте h трапеции, т. е. $2r = h$. Отсюда $h = 2 \cdot 36 = 72$.

Ответ:

7	2			
---	---	--	--	--

17

Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен 34. Найдите высоту этой трапеции.



Решение.

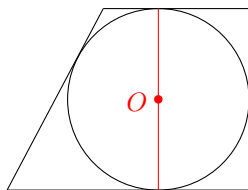
Перпендикуляр к основаниям трапеции, проведённый через центр окружности с одной стороны равен двум радиусам окружности, а с другой — высоте h трапеции, т. е. $2r = h$. Отсюда $h = 2 \cdot 34 = 68$.

Ответ:

6	8			
---	---	--	--	--

18

Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, равен 10. Найдите высоту этой трапеции.



Решение.

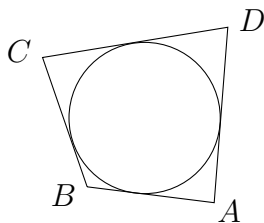
Перпендикуляр к основаниям трапеции, проведённый через центр окружности с одной стороны равен двум радиусам окружности, а с другой — высоте h трапеции, т. е. $2r = h$. Отсюда $h = 2 \cdot 10 = 20$.

Ответ:

2	0			
---	---	--	--	--

19

Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности, $AB = 7$, $BC = 10$, $CD = 14$. Найдите AD .



Решение.

Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности, значит

$$AB + CD = BC + AD,$$

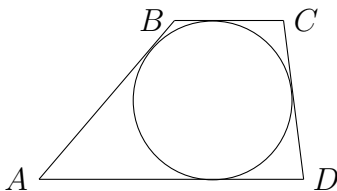
тогда $AD = AB + CD - BC = 7 + 14 - 10 = 11$.

Ответ:

1	1			
---	---	--	--	--

20

Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC описана около окружности, $AB = 11$, $BC = 6$, $CD = 9$. Найдите AD .



Решение.

Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности, значит

$$AB + CD = BC + AD,$$

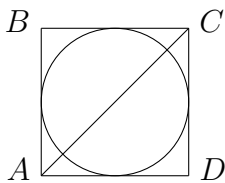
тогда $AD = AB + CD - BC = 11 + 9 - 6 = 14$.

Ответ:

1	4			
---	---	--	--	--

21

Радиус вписанной в квадрат окружности равен $2\sqrt{2}$. Найдите диагональ этого квадрата.



Решение.

Т.к. квадрат описан около окружности, то сторона квадрата — удвоенный радиус (см. номер 14), т.е. сторона равна $4\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника ADC по теореме Пифагора найдём AC

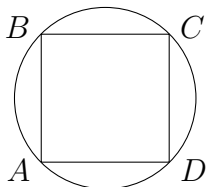
$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{32 + 32} = 8.$$

Ответ:

8				
---	--	--	--	--

22

Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $4\sqrt{2}$. Найдите длину стороны этого квадрата.



Решение.

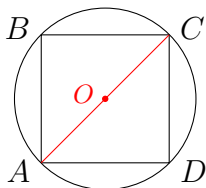
Центр окружности лежит на середине диагонали, поэтому диагональ равна $8\sqrt{2}$. Пусть сторона квадрата a . Из прямоугольного треугольника ADC по теореме Пифагора $a^2 + a^2 = (8\sqrt{2})^2$; $2a^2 = 64 \cdot 2$; $a^2 = 64$; $a = 8$.

Ответ:

8				
---	--	--	--	--

23

Сторона квадрата равна $24\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



Решение.

Центр окружности лежит на середине диагонали, поэтому радиус равен половине диагонали. Из прямоугольного треугольника ADC по теореме Пифагора найдём диагональ AC .

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{(24\sqrt{2})^2 + (24\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 \cdot 24^2 \cdot 2} = 48.$$

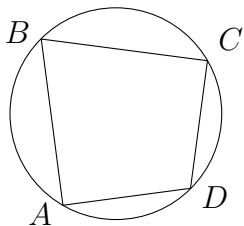
Тогда радиус 24.

Ответ:

2	4			
---	---	--	--	--

24

Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 82° . Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.



Решение.

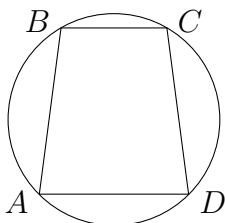
Т.к. четырёхугольник вписан в окружность, то $\angle A + \angle C = 180^\circ$, тогда $\angle C = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$.

Ответ:

9	8			
---	---	--	--	--

25

Угол A трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , вписанной в окружность, равен 81° . Найдите угол C этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



Решение.

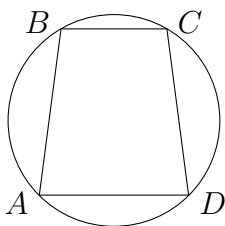
Т.к. четырёхугольник вписан в окружность, то $\angle A + \angle C = 180^\circ$, тогда $\angle C = 180^\circ - 81^\circ = 99^\circ$.

Ответ:

9	9			
---	---	--	--	--

26

Угол A трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , вписанной в окружность, равен 79° . Найдите угол B этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



Решение.

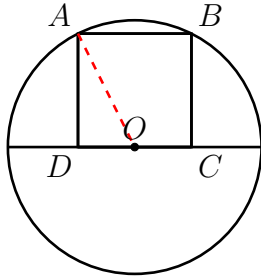
Так как основания трапеции AD и BC параллельны, то сумма односторонних углов при боковой стороне AB равна 180° . Тогда $\angle B = 180^\circ - 79^\circ = 101^\circ$.

Ответ:

1	0	1		
---	---	---	--	--

27

Точка O является серединой стороны CD квадрата $ABCD$. Радиус окружности с центром в точке O , проходящей через вершину A , равен $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Найдите площадь квадрата $ABCD$.



Решение.

Обозначим сторону квадрата за a . Тогда площадь квадрата равна a^2 . Для треугольника AOD запишем теорему Пифагора.

$$AD^2 + DO^2 = AO^2;$$

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2;$$

$$a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4};$$

$$\frac{5}{4}a^2 = \frac{5}{4}$$

$$a^2 = 1.$$

Ответ:

1				
---	--	--	--	--